3.9 定积分的几何应用与经济应用

学习要求：
1.了解定积分的微元法；
2.会用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积；
3.会利用定积分求解简单的经济应用问题.

定积分是求总量的数学模型，它在几何学、物理学、经济学等方面都有着广泛的应用，这里主要讨论定积分在几何学和经济学上的应用.为讨论定积分的应用，先介绍常用的**微元法**（或称**元素法**）.

3.9.1 微元法

下面以求曲边梯形的面积为例来说明微元法.在 3.4 节的引例 1 中，采用了“分割——近似——求和——取极限”的四个步骤，得到曲边梯形面积的表达式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，显得比较繁琐，可以考虑简化步骤.

由于定积分的值与区间$[a,b]$有关，与分割无关，分割区间的目的主要是为使第二步近似产生的误差较小，所以“分割”步骤可以简化为选取一个有代表性的小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$. 应该注意到，在“近似”这个步骤中得到的每个小曲边梯形面积的近似值$f(\xi_i)\Delta x_i$，实际上对应着定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中的被积表达式$f(x)\mathrm{d}x$，这一步骤是关键.为简化起见，就把区间$[x,x+\mathrm{d}x]$左端点x取为ξ_i，以$f(x)\mathrm{d}x$作为区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上曲边梯形面积的近似值（如图 3.17），称为**面积微元**，记作$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$.求和、取极限的步骤就简化成以$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$为被积表达式，写出定积分表达式.

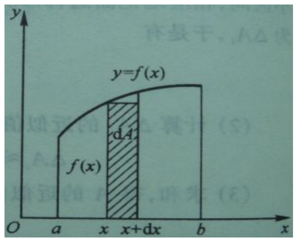


图 3.17

所以，微元法的三个步骤（以曲边梯形面积为例）：

（1）取微段$[x,x+\mathrm{d}x]$

（2）求微元$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$（面积微元）

（3）写出定积分表达式，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

当然，对于一般问题而言，能用微元法计算的量U，需要满足下列条件：

(1) U与变量x的变化区间$[a,b]$有关；

(2) U对于区间$[a,b]$具有可加性；

(3) U的部分量ΔU可近似地表示成$f(x)\mathrm{d}x$.

3.9.2 定积分的几何应用

1.平面图形的面积

问题 1：设平面图形是由曲线$y=f(x),y=g(x)$和直线$x=a,x=b$所围成，在$[a,b]$上$f(x)\ge g(x)$，求它的面积（如图 3.18）.

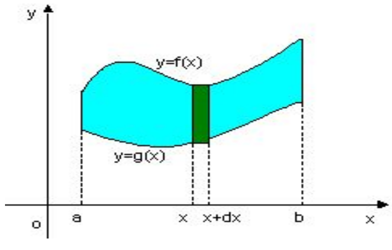


图 3.18

一般把这样的平面图形称为X—型.

用微元法解决此问题.取x为积分变量，其变化区间$[a,b]$，在$[a,b]$中任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，该区间上图形面积近似等于高为$[f(x)-g(x)]$，底为$\mathrm{d}x$的矩形面积，因此面积微元为

$$\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$

所求围成图形的面积为

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$

此式可以作为求 X -型图形面积的公式.

我们还可以解决更一般的面积问题(如图 3.19)

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{b} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$

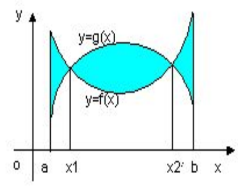


图 3.19

问题 2:设平面图形是由曲线 $x = u(y), x = v(y)$ 和直线 $y = c, y = d$ 所围成,在 $[c,d]$ 上 $u(y) \geq v(y)$ ，求它的面积（如图 3.20）.

一般把这样的平面图形称为 Y —型.

取 y 为积分变量，其变化区间 $[c,d]$ ，在 $[c,d]$ 中任取小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$，该区间上图形面积近似等于宽为 $[u(y) - v(y)]$，底为 $\mathrm{d}y$ 的矩形面积，因此面积微元为

$$\mathrm{d}A = [u(y) - v(y)]\mathrm{d}y$$

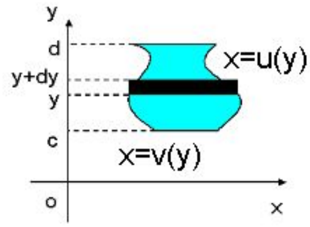


图 3.20

所求图形的面积为

$$A = \int_c^d [u(y) - v(y)]\mathrm{d}y$$

此式可以作为求 Y -型图形面积的公式.

从以上的讨论可以看出，对于平面图形面积问题的求解，需要较为准确地画出图形，关键是要弄清将图形看成的类型（ X -型或 Y -型），选取积分变量，确定积分区间，然后列出面积的表达式，求出定积分的值.

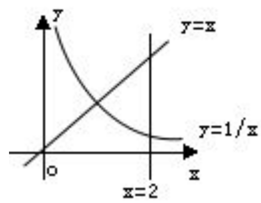


图 3.21

【例 3.80】 求曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 及直线 $y = x$， $x = 2$ 所围图形的面积.

【解】画出草图（如图 3.21)，求出曲线、直线之间的交点坐标分别为

$$(1,1),\quad \left(2, \frac{1}{2}\right) \text{和} (2,2)$$

将该图形看成 X -型，以 x 为积分变量，积分区间为 $[1,2]$ ，图形上、下边界曲线分别为 $y = x$ 和 $y = \dfrac{1}{x}$ ，所以

$$S = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

本例也可以将图形看成 Y -型，但需要将图形分成两块进行计算. 如果将图形看成 Y -型，过（1,1）点作水平线，将图形分成上、下两块（如图 3.22）. 以 y 为积分变量，积分区间分别为 $[\frac{1}{2}, 1]$ 和 $[1,2]$ ，图形上方小块的左、右边界曲线分别表示为 $x = y$ 和 $x = 2$ ，图形下方小块的左、右边界曲线分别表示为 $x = \dfrac{1}{y}$ 和 $x = 2$ ，于是

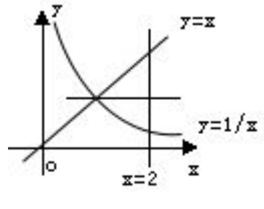
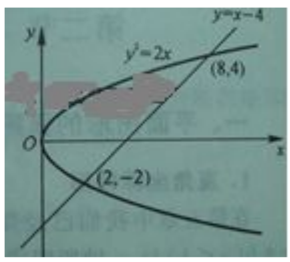


图 3.22

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - \frac{1}{y})\mathrm{d}y + \int_1^2 (2 - y)\mathrm{d}y$$

$$= (2y - \ln y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + (2y - \frac{1}{2}y^2)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

【例 3.81】 求 $y^2 = 2x$ 及直线 $y = x - 4$ 所围平面图形的面积.



【解】 画出草图（如图 3.23），曲线与直线间的交点坐标分别为

$$(2,-2) \text{ 和 } (8,4)$$

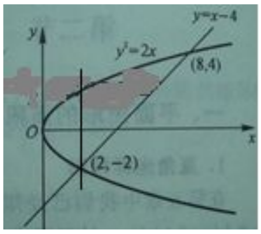
如果将该图形看成Y-型，以y为积分变量，积分区间为$[-2,4]$，

左、右两条边界曲线表示成$x=\frac{1}{2}y^2$和$x=y+4$，于是

$$S=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\bigg|_{-2}^{4}=18$$

图 3.23

如果将该图形看成X-型，过点（2,-2)作平行于y轴的直线$x=2$把图形分成左、右两块（如图 3.24），图形左块上、下边界曲线分别为$y=\sqrt{2x}$和$y=-\sqrt{2x}$，图形右块上、下边界曲线分别为$y=\sqrt{2x}$和$y=x-4$，于是



$$S=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\right]\mathrm{d}x+\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_2^8\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-x+4\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+4x\right)\bigg|_2^8=18$$

图 3.24

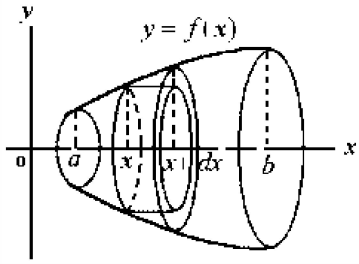
从以上两个例题可以看出，有些平面图形既可以看成X-型，也可以看成Y-型，但将图形看成什么型，选取什么积分变量对计算的繁简会产生一定的影响.

2.立体的体积

（1）旋转体的体积

旋转体是由一个平面图形绕该平面内一条定直线旋转一周而得到的立体，定直线称为旋转轴.

问题 1：计算由$[a,b]$上连续曲线$y=f(x)$（$f(x)\geq 0$），直线$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所成的旋转体的体积（如图 3.25）.



用微元法来解决.取x为积分变量，$x\in[a,b]$，对于区间$[a,b]$上的任一区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，它所对应的小曲边梯形绕x轴旋转而成的薄片似的立体的体积近似等于以$f(x)$为底半径，$\mathrm{d}x$为高的圆柱体体积，因此，体积元素$\mathrm{d}V=\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$，所求的旋转体的体积为

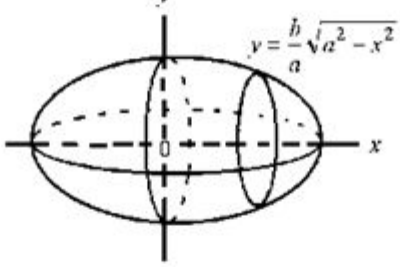
图 3.25

$$V=\int_a^b\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$$

类似地，由曲线$x=u(y)$，直线$y=c,y=d$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d\pi\left[u(y)\right]^2\mathrm{d}y$$

【例 3.82】计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕x轴旋转而成的立体体积（如图 3.26）.



【解】$V_x=\int_{-a}^{a}\pi\cdot\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^a\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

图 3.26

【思考】如果该椭圆绕 y 轴旋转，旋转成的立体体积如何求？

【例 3.83】求由曲线 $y=x^2, y=2-x^2$ 所围成的图形绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积（如图 3.27）.

【解】画出草图，求交点 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$ 得 $(-1,1),(1,1)$，两条抛物线的顶点分别为 $(0,0),(0,2)$，该平面无论绕 x 轴还是 y 轴旋转所得的旋转体都可以看成旋转体的组合. 绕 x 轴的旋转体可以看成两个旋转体体积之差，而绕 y 轴的旋转体可以看成两个旋转体体积之和.

$$V_x=\int_{-1}^{1}\pi(2-x^2)^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\pi(x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{16}{3}\pi$$

$$V_y=\int_{1}^{2}\pi(\sqrt{2-y})^2\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\pi(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y=\pi$$

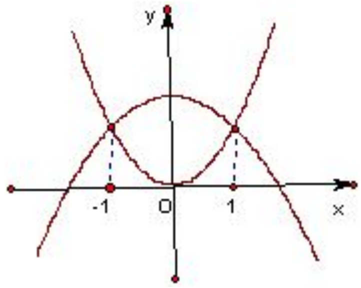
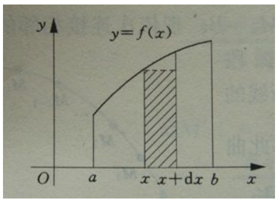
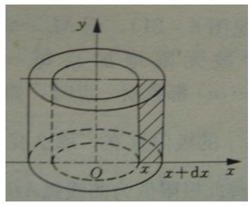


图 3.27

*问题 2. 计算由 $[a,b]$ 上连续曲线 $y=f(x)$（$f(x)\geq 0$），直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积（如图 3.28（a））.



（a）



（b）

图 3.28

用微元法. 取 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，则 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的小曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得立体的体积近似等于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的小矩形绕 y 轴旋转一周所得立体的体积（如图 3.28（a））. 小矩形旋转成的立体为一小柱壳（如图 3.28（b）），其中底面内半径为 x，外半径为 $x+\mathrm{d}x$，高为 $f(x)$，这个小柱壳的体积近似为 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，因此，体积元素为

$$\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$$

所以

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

*【例 3.84】求正弦曲线 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转所成的旋转体体积.

【解】 绕 y 轴旋转所成的旋转体体积为

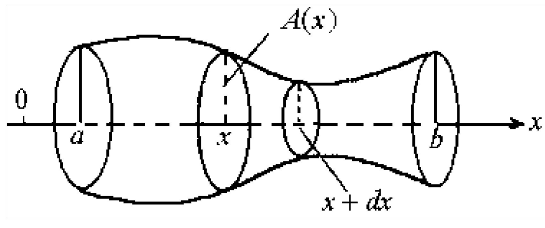
$$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\cos x$$

$$=-2\pi(x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x)$$

$$=-2\pi(-\pi-\sin x\Big|_0^{\pi})=2\pi^2$$

（2）平行截面面积为已知的立体的体积

如图 3.29 所示，立体位于过点 $x=a$ 和点 $x=b$ 且垂



直于 x 轴的两个平面之间，任意一个垂直于 x 轴的平面所截得的立体的截面积为 $A(x)$，$x\in[a,b]$，求该立体的体积.

用微元法. 取 x 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$. 立体中相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一薄片的体积近似等于底面积为 $A(x)$，高为 $\mathrm{d}x$ 的扁圆柱体的体积，因此，体积元素为 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$，立体的体积为

图 3.29

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

在例 3.82 中已求得绕 x 轴旋转而成的椭球体的体积，这里还可以将其看成截面面积为已知的立体（截面为大大小小的圆，如图 3.26），求其体积.

在 x 处 $(-a\le x\le a)$，用垂直于 x 轴的平面去截立体所得截面积为

$$A(x)=\pi\cdot(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2$$

所以

$$V_x=\int_{-a}^{a}A(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

3.9.3 定积分在经济中的应用

由定积分的经济意义知道，已知某一经济量 $F(x)$ 的边际函数为 $f(x)$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示该经济总量在区间 $\left[a,b\right]$ 上的增量. 由此，我们可以解决下面几类问题.

1. 由边际函数求原函数

设经济函数 $F(x)$ 的边际函数为 $f(x)$，则由微积分基本公式，有

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=F(x)-F(0)$$

所以

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+F(0)$$

如果已知总成本函数 $TC(Q)$ 的边际成本函数 $MC(Q)$，固定成本 FC，则

$$TC(Q)=\int_0^Q (MC)\mathrm{d}Q+FC$$

如果已知总收益函数 $TR(Q)$ 的边际收益函数 $MR(Q)$，则

$$TR(Q)=\int_0^Q (MR)\mathrm{d}Q$$

由总利润函数 $\pi(Q)$ 与 $TC(Q)$，$TR(Q)$ 的关系 $\pi(Q)=TR(Q)-TC(Q)$，可得

$$\pi(Q)=\int_0^Q (MR-MC)\mathrm{d}Q-FC$$

【例 3.85】某企业生产一种产品，生产 x 吨的边际成本 $MC=3x^2-14x+100$（万元），固定成本 $FC=500$（万元），求总成本函数及产量从开始到 10 吨时的总成本.

【解】 总成本函数

$$TC(x)=\int_0^x (3x^2-14x+100)\mathrm{d}x+FC$$
$$=x^3-7x^2+100x+500$$

产量从开始到 10 吨时的总成本为

$$TC=\int_0^{10}(3x^2-14x+100)\mathrm{d}x+500$$
$$=1800\text{（万元）}$$

【例 3.86】 已知生产某产品 x 个单位总收益的变化率为 $MR=200-\frac{x}{50}$（元 / 单位），试求（1）生产 x 个单位时的总收益（2）求生产 2000 个单位时的总收益.

【解】（1）总收入函数

$$TR(x)=\int_0^x\left(200-\frac{x}{50}\right)\mathrm{d}x=200x-\frac{x^2}{100}\text{（元）}$$

（2）生产 2000 个单位产品时的总收入为

$$TR(2000)=\int_0^{2000}\left(200-\frac{x}{50}\right)\mathrm{d}x=\left(200x-\frac{1}{100}x^2\right)\Bigg|_0^{2000}$$
$$=400000-40000=360000\text{（元）}$$

2.由变化率求变化区间上的增量

由定积分经济意义直接可得

$$\Delta F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

【例 3.87】某工厂生产某商品在时刻 t 的总产量的变化率 $Q'(t)=10t+70$（单位/小时），求由 $t=3$ 到 $t=5$ 这两个小时的总产量.

【解】总产量

$$\Delta Q=\int_3^5 Q'(t)\mathrm{d}t=\int_3^5(10t+70)\mathrm{d}t$$
$$=(5t^2+70t)\Big|_3^5=220$$

这两个小时的总产量为 220 单位.

【例 3.88】生产某产品 x 件时的边际成本 $MC=x^2-16x+70$（元/件）. 当产量由 30 件到 60 件时，需追加成本多少元?

【解】需追加的成本

$$\Delta C=\int_{30}^{60}(x^2-16x+70)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+70x\right)\Bigg|_{30}^{60}$$
$$=43500$$

需追加的成本为 43500 元.

3.由边际函数求最大利润

【例 3.89】 设生产某产品的固定成本 $FC=50$（万元），当产量为 x 吨时的边际成本 $MC=x^2-2x+45$（万元/吨），边际收益 $MR=-10x+225$（万元/吨），试求:

（1）总利润函数;

（2）总利润最大的产量，并求最大利润.

【解】（1）设总利润函数为 $\pi(x)$，则

$$\pi(x)=\int_0^x(MR-MC)\mathrm{d}x-FC$$
$$=\int_0^x(225-10x-x^2+2x-45)\mathrm{d}x-50$$
$$=-\frac{1}{3}x^3-4x^2+180x-50$$

（2）令 $\pi'(x)=-x^2-8x+180=0$，得到 $x=10$（吨）

又 $\pi''(10)=-28<0$，$\pi(x)$ 在 $x=10$ 取得极大值，而 $x=10$ 为唯一驻点，且最大利润存在. 所以，当产量为 10 吨时，利润最大. 最大利润为

$$\pi(10)=1016\frac{2}{3}\approx 1016.66$$

当产量为 10 吨时，获得最大利润，最大利润为1016.66万元.

4. 资本现值与投资问题

在第 1 章 1.7 节中介绍过复利问题和贴现问题. 设有 A_0 元货币，若按年利率 r 作连续复利计算，则 t 年后的价值为 $A_0\mathrm{e}^{rt}$ 元；反之，若 t 年后要有货币 B_0 元，则按连续复利计算，现在应有 $B_0\mathrm{e}^{-rt}$ 元，称为**资本现值**（或**现值**）.

现设在时间区间$[0,T]$内 t 时刻的收益率（表示单位时间的收益）为 $f(t)$，若按年利率 r 作连续复利计算，求在$[0,T]$内获得的总收益的现值W.

用微元法. 在时间区间$[0,T]$内任取时间区间$[t,t+\mathrm{d}t]$，由资本现值的概念，在$[t,t+\mathrm{d}t]$内的收益现值近似等于 $f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$，于是，总收益现值微元为

$$\mathrm{d}W=f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$$

所以在$[0,T]$内获得的总收益的现值为

$$W=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$$

【例 3.90】某投资公司向一企业投资 800 万元，年利率为 5%，在 20 年中每年将获得收益 200 万元，求总收益的现值W，投资所得的净收入 R 和投资回收期T.

【解】总收益的现值

$$W=\int_0^{20}200\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=\frac{200}{0.05}(1-\mathrm{e}^{-0.05\times 20})\approx 2528.5 \text{（万元）}$$

投资所得的净收入

$$R=2528.5-800=1728.5 \text{（万元）}$$

由$\int_0^T 200\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=800$，得

$$-4000\mathrm{e}^{-0.05T}+4000=800$$

$$\mathrm{e}^{-0.05T}=0.8$$

解得 $$T=20(\ln 5-\ln 4)\approx 4.46 \text{（年）}$$

5. 消费者剩余和生产者剩余

在第 1 章我们曾讨论过市场价格的供需平衡，在市场经济下，价格和数量在不断调整，最后趋于平衡价格和平衡数量，分别用 P^* 和 Q^* 表示，平衡点 (Q^*,P^*) 是供给曲线 $P=S(Q)$ 与需求曲线 $P=D(Q)$ 的交点(如图 3.30).

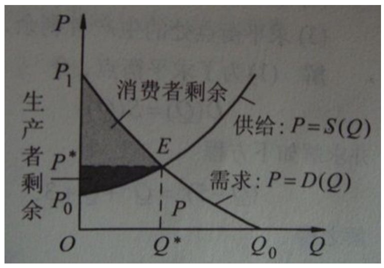


图 3.30

消费者剩余和生产者剩余都是经济学中的重要概念.

消费者剩余（Consumer Surplus），简记为 CS，是指消费者在购买一定数量的某种商品时愿意支付的最高总价格和实际支付的总价格之间的差额.

生产者剩余（Producer Surplus），简记为 PS，是指卖者出售一种物品或服务得到的价格减去卖者的成本.

从图 3.30 可以看出，平衡点处的消费者剩余为

$$CS=\int_0^{Q^*}D(Q)\mathrm{d}Q-P^*Q^*$$

平衡点处的生产者剩余为

$$PS=P^*Q^*-\int_0^{Q^*}S(Q)\mathrm{d}Q$$

【例 3.91】已知需求函数 $P=-Q^2-4Q+48$，供给函数 $P=Q^2+4Q+6$，求

（1）供需平衡点；（2）平衡点处的消费者剩余和生产者剩余；（3）当价格为 16 时的消费者剩余.

【解】（1）由 $-Q^2-4Q+48=Q^2+4Q+6$

解得 $Q=3$ ，代入 $P=-Q^2-4Q+48$ 得 $P=27$

求得平衡点为 $(3,27)$.

(2)平衡点处的消费者剩余

$$CS=\int_0^3(-Q^2-4Q+48)\mathrm{d}Q-P^*Q^*$$
$$=(-\frac{1}{3}Q^3-2Q^2+48Q)\Big|_0^3-81$$
$$=36$$

平衡点处的生产者剩余

$$PS=P^*Q^*-\int_0^3(Q^2+4Q+6)\mathrm{d}Q$$
$$=81-(\frac{1}{3}Q^3+2Q^2+6Q)\Big|_0^3$$
$$=36$$

（3）当 $P=16$ 时， $Q_D=4$, 此时的消费者剩余

$$CS=\int_0^4(-Q^2-4Q+48)\mathrm{d}Q-PQ$$
$$=(-\frac{1}{3}Q^3-2Q^2+48Q)\Big|_0^4-64$$
$$=\frac{224}{3}\approx 74.67$$

习题 3.9

1. 求由下列各曲线所围成的平面图形的面积：

（1） $y=\sqrt{x}, y=x$ ；　　（2） $y=\mathrm{e}^x, x=0, y=\mathrm{e}$ ；

（3） $y=3-x^2, y=2x$ ；　　（4） $y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}^{-x}, y=2$ ；

（5） $y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}^{-x}, x=2$ ；　　（6） $y=x^2, y=\frac{x^2}{4}, y=1$ ；

（7） $y=x^2-2, y=2-x^2$ ；　　（8） $y=\frac{2}{x}, y=2x, y=3$.

2. 求下列各曲线所围成的平面图形绕指定轴旋转的旋转体的体积：

（1） $y=x^2, x=2, y=0$ ，绕 x 轴，绕 y 轴；

（2） $y=x^3, y=8, x=0$ ，绕 x 轴，绕 y 轴；

（3） $y=x^2, x=y^2$ ，绕 x 轴，绕 y 轴；

（4） $y=\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y=0$ ，绕 x 轴，绕 y 轴.

3. 某企业生产某产品的边际成本 $MC=2x^2-3x+26$ ，固定成本 $FC=90$ ，求总成本

函数.

4. 已知生产某产品 x 单位时的边际收益 $MR=100-2x$（元/单位），求生产 40 单位时的总收益，并求再多生产 10 个单位时所增加的收益.

5. 已知某产品的边际收益 $MR=25-2x$，边际成本 $MC=x^2-3x+6$，固定成本 $FC=10$，求当 $x=6$ 时的毛利和纯利.

6. 某企业生产 x 吨产品时的边际成本为 $MC=\dfrac{1}{50}x+30$（元/吨），固定成本为 900 元，求产量为多少时平均成本最低？

7. 在某地，当消费者的个人收入为 x 元时，消费支出 $W(x)$ 的变化率 $W'(x)=\dfrac{15}{\sqrt{x}}$，当个人的收入由 1600 元增加到 2500 元时，消费支出增加多少？

8. 假设某产品的边际收益 $MR=130-8x$（万元/万台），边际成本 $MC=0.6x^2-2x+10$（万元/万台），固定成本为 10 万元，产量 x 以万台为单位.

（1）求总成本函数和总利润函数.

（2）求产量由 4 万台增加到 5 万台时利润的变化量.

（3）求利润最大时的产量，并求最大利润.

9. 某投资项目，投资成本需 100（万元），年利率为 5%，10 年中每年收益 25 万元，求这 10 年中该项投资的总收益的现值 W，并求投资回收期 T.

10. 如果需求函数为 $P=50-0.025Q^2$，需求量为 20 个单位时，求消费者剩余 CS.

习题 3.9 参考答案

1.（1）$\dfrac{1}{6}$；（2）1；（3）$\dfrac{32}{3}$；（4）$4\ln 2-2$；

（5）$e^2+e^{-2}-2$；（6）$\dfrac{4}{3}$；（7）$\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$；（8）$\dfrac{5}{4}-2\ln 3+2\ln 2$

2.（1）绕 x 轴：$\dfrac{32\pi}{5}$；绕 y 轴：8π（2）绕 x 轴：$\dfrac{768\pi}{7}$；绕 y 轴：$\dfrac{96\pi}{5}$

（3）绕 x 轴：$\dfrac{\pi}{10}$；绕 y 轴：$\dfrac{\pi}{10}$（4）绕 x 轴：$\dfrac{\pi^2}{2}$；绕 y 轴：$\pi^2-2\pi$

3. $\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+26x+90$；

4. $TR(40)=2400$（元）；$\Delta TR=100$（元）

5. 毛利：60；纯利 50

6. 产量为 300 吨时平均成本最低

7. $\Delta W=300$（元）

8.（1）总成本函数：$0.2x^3-x^2+10x+10$，总利润函数：$-0.2x^3-3x^2+120x-10$；

（2）80.8 万元；（3）10 万台，690 万元

9. 约 196.8（万元）；约 4.46 年

10. 133.3